

# Sinteza rezultatelor obtinute in proiectul de cercetare ID\_1104

## *Evolutie neliniara, cuasi-coerenta si transport in turbulenta fluidelor*

### **Obiectivele si activitatile Etapelor I si II din 2009**

1. Dezvoltarea metodelor de studiu al statisticii traiectoriilor prin includerea invariantei distributiei vitezei Lagrangiene (A2).

- 1.1. Extinderea metodelor semi-analitice de studiu al statisticii traiectoriilor (dezvoltate in INFLPR).
- 1.2. Realizarea unor coduri numerice complexe care sa permita studiul unei clase largi de sisteme fizice.

2. Interactiuni regulate de tip wave-wave: demers algebric si demers diferential (B1).

- 2.1. Interactiuni gazodinamice regulate de tip wave-wave: in cazurile unidimensional nestationar si bidimensional stationar, o comparatie intre o descriere algebrica si o alta diferentiala.
- 2.2. Participare la conferinte:
  - SIAM Annual Meeting, Denver, Colorado, SUA.
  - Nonlinear Conservation Laws and Applications, la Institute for Mathematics and Its Applications, Minneapolis, Minnesota, SUA.

3. Clasa ecuatiilor cu derivate partiale de ordinul I ale caror caracteristice Cauchy sunt linii drepte. Formularea variationala proiectiv invarianta a conditiilor entropice pentru aceasta clasa (C1).

- 3.1. Organizarea saptamanala, la Institutul de Matematica Simion Stoilow al Academiei Romane, a unui Seminar asupra Sistemelor hiperbolice de legi de conservare.
- 3.2. Definitia intrinseca a operatorului eliptic prin densitatea entropica care se asociaza aproximarii vascoase a solutiilor entropice pentru ecuatii cuasilineare de ordinul I pe varietati si a semigrupului de contractii nelineare atasat solutiilor entropice.

### **Principalele rezultate obtinute in 2009**

1. Dezvoltarea metodelor de studiu al statisticii traiectoriilor prin includerea invariantei distributiei vitezei Lagrangiene.

Advectia indusa de campuri de viteze rotationale (cu divergenta nula) determina captura particulelor intr-o miscare de rotire atunci cand variatia temporală a acestora este lenta. Efectele neliniare ale capturii asupra proprietatilor statistice ale traiectoriilor sunt foarte puternice, in special in cazul turbulentei bidimensionale, si conduc la distributii ne-Gaussiene si la coeficienti de difuzie anormali. Aceste rezultate au fost obtinute prin simulari numerice

directe ale traiectoriilor. Metodele analitice existente (aproximatia Corrsin, aproximatia interactiei directe si altele) nu sunt adecvate descrierii acestor procese. Captura traiectoriilor este in esenta legata de invarianta functiei de curgere Lagrangiene in cazul static iar metodele existente nu sunt compatibile cu aceasta constrangere. Noi am dezvoltat primele metode analitice [*the decorrelation trajectory method (DTM)* and *the nested subensemble approach (NSA)*], care descriu efectele statistice ale capturii traiectoriilor. Ele sunt bazate pe o idee complet diferita de cele folosite in metodele existente si au proprietatea de a fi compatibile cu invarianta functiei de curgere. Am aratat intr-o serie de lucrari ca procesul de captura a traiectoriilor nu numai ca determina distributii ne-Gaussiene ale traiectoriilor dar si cuasi-coerenta si memorie. Traiectoriile capturate formeaza structuri cuasi-coerente.

Procesul de advecție în câmpuri de viteză cu divergență nulă este caracterizat și de invarianta statistică a vitezei Lagrangiene. Metodele DTM și NSM nu au această proprietate. Proiectul are ca obiectiv pentru 2009 dezvoltarea unei noi metode analitice pentru determinarea statisticii traiectoriilor care să aibă proprietatea de invariantă statistică a vitezei Lagrangiene.

S-a reușit să se obțină acest rezultat important. Ideea de bază a noii metode este separarea dinamicii de elementele geometrice.

Se arată că echiliniile funcției de curgere  $\varphi(x_1, x_2)$  corespund unei valori date a acestei funcții și formează structuri (geometrice). Aceste structuri apar în probabilitatea condiționată ca  $\varphi$  să aibă valoarea  $\varphi_0$  în  $\mathbf{x}$  știind că are aceeași valoare în  $\mathbf{x}=0$  și că orientarea gradientului este fixată în acest punct. Forma tipică a acestei probabilități este arată în Fig.1. Se vede că această probabilitate  $P_c$  este mare pe o zonă aproximativ inelară, scade până la zero în mijlocul acestei zone și în vecinătatea acesteia și devine egală cu probabilitatea necondiționată la distanțe suficient de mari. Probabilitatea este maximă pe un contur ce reprezintă echiliniile  $\varphi_0$  a funcției de curgere mediate cu  $P_c$  (curba de neagră în Fig. 2). Dimensiunea acestor structuri este o funcție descrescătoare de modulul funcției de curgere și depinde de Corelația Euleriană a câmpului stohastic  $\varphi$ .

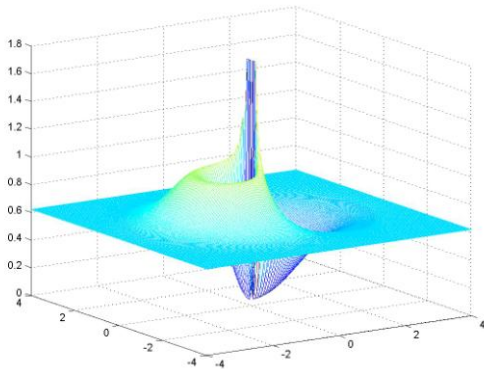


Fig.1 Probabilitatea ca echiliniile  $\varphi_0$  ale funcției de curgere ce trec prin  $x=0$  să ajungă în  $x$ .

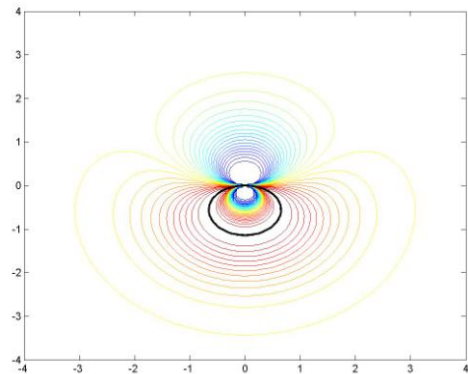


Fig. 2 Echiliniile probabilității din Fig. 1 și echiliniile funcției de curgere medii (negru).

Viteza (care are modulul egal cu modulul gradientului lui  $\varphi$  și este tangenta la liniile de curgere) este statistic independentă de funcția de curgere în același punct. Ca urmare distribuția sa pe echiliniile  $\varphi_0$  este aceeași ca în întregul ansamblu statistic. Am arătat că există o viteză medie în lungul structurii. Statistica traiectoriilor pe fiecare structură se determină ținând cont de faptul că această mișcare nu mai prezintă captură. Evoluția probabilității de localizare a unor particule ce pornesc din origine se determină sumând contribuțiile tuturor structurilor.

Metoda a fost denumita *velocity on structures (VS)* si este prezentata intr-o lucrare aflata in faza de redactare [1].

Aceasta metoda este in esenta analitica si reduce problema determinarii functiei de distributie a particulelor advectionate stochastic la determinarea structurilor de echilibrului si a evolutiei probabilitatii de localizare a particulelor pe aceste structuri descrisa de ecuatii de advection-difuzie cu coeficienti determinati de corelatia Euleriana a functiei de curgere. Aceste ecuatii trebuie rezolvate numeric. A fost realizat si testat un sistem de coduri care determina probabilitatea deplasarii particulelor, coeficientul de difuzie dependent de timp si ponderea particulelor capturate si acelor libere ca functie de timp.

Am arata ca aceasta metoda nu este o simpla imbunatatire a celor precedente (DTM si NSA) si ca ea releva procese neliniare interesante ce apar in cazul in care exista o viteza medie  $V_d$  (gradient mediu al functiei de curgere). In prezenta capturii particulelor, probabilitatea deplasarii este ne-gaussiana si se imparte in doua componente: una pentru particulele capturate (o functie ce se satureaza la o forma ascutita localizata in origine) si una pentru particulele libere (o functie ce se deplaseaza in directia vitezei medii si se largeste continuu). Viteza medie pentru a doua componenta este mai mare decat  $V_d$  si produce un flux marit care compenseaza exact particulele capturate al caror flux este nul. Apare deci o "accelerare" a particulelor libere (determinata nu de un proces dinamic ci de o selectie intrinseca a vitezei particulelor libere). In cazul in care exista o miscare de drift a functiei de curgere, acest proces nelinier genereaza miscari ordonate in sensuri opuse: particulele capturate se misca cu viteza de drift a functiei de curgere iar cele libere au o viteza medie in sens opus lui  $V_d$  care anuleaza fluxul total. Procesul de captura a traiectoriilor genereaza in acest caz curgeri zonale in sensuri opuse.

Rezultatele privind statistica traiectoriilor au fost folosite pentru dezvoltarea unei metode Lagrangiene noi pentru studiul evolutiei turbulentei. Aceasta a condus la identificare unor procese neliniare ce apar in regim puternic nelinier. A fost studiate moduri test pentru turbulenta de drift. Am aratat ca generarea curgerilor zonale de particule este deosebit de importanta pentru plasmile confinate magnetic deoarece conduce la atenuarea turbulentei de drift si la o evolutie intermitenta a acesteia.

S-a obtinut o perspectiva noua in intelegerea evolutiei neliniare a undelor de drift in plasma confinata magnetic. Am aratat ca rolul principal il are captura traiectoriilor ionilor in potentialul stochastic. Apar structuri cuasicoerente de traiectorii capturate. In plus, miscarea potentialului cu viteza diamagnetica, specifica undelor de drift, determina aparitia unor fluxuri de ioni in regim nelinier (cand amplitudinea vitezei de drift electric este mai mare decat viteza diamagnetica). O parte din ioni sunt capturati si antrenati in miscarea potentialului in timp ce restul ionilor se misca in directie opusa. Aceste fluxuri zonale opuse se compenseaza, dar ele produc modificarea puternica a functiei de distributie. Am aratat ca evolutia turbulentei de drift spre scale spatiale mari (cascada inversa) este determinata de captura traiectoriilor ionilor care mediaza potentialul si produce micșorarea vitezei diamagnetice efective. Fluxurile de ioni determina micșorarea ratei de crestere a modurilor si in final atenuarea lor si in acelasi timp genereaza moduri cu caracteristici diferite (zonal flows) prin interactia cu fluctuatiile vitezei diamagnetice determinate de turbulenta. Aceste rezultate sunt prezentate in [2].

Mentionam ca acestea sunt primele estimari analitice ale evolutiei turbulentei in regim puternic nelinier. Efectele gasite sunt compatibile cu rezultatele simularilor numerice.

## 2. Interactiuni regulate de tip wave-wave: demers algebric si demers diferential

Unele descrieri semnificative de evolutii gazodinamice turbulente conteaza in mod esential pe doua tipuri de ingrediente: solutii de tip "wave" si, respectiv, solutii de tip interactiune "wave-wave".

Cele doua tipuri de ingrediente apar in literatura in doua versiuni teoretice: o versiune [neanalitica] calitativa si, respectiv, o versiune analitica.

Lucrarea noastra este interesata de versiunea analitica si de raportarea ei la versiunea calitativa.

Versiunea calitativa [folosita de exemplu in studiul problemei lui Riemann 2D] construiesc un "portet robot" al unei solutii 2D interactiune wave-wave de un tip special [ortogonal] in care sunt implicate patru solutii wave - avand fiecare forma unei solutii 1D prin unde simple.

Versiunea analitica conteaza pe o structura care vine din

- extinderea multidimensionala a unei solutii 1D prin unde simple;
- extinderea multidimensionala a caracterului veritabil nelinear 1D;
- identificarea si clasificarea unor tipuri de coerenta asociate celor doua clase de solutii mentionate [wave, interactiune wave-wave];
- renuntarea, in general, la caracterul ortogonal.

Versiunea analitica este constructiva. In lucrarea noastra consideram doua constructii: "algebra" [de tip Burnat] si, respectiv, "diferentiala" [de tip Martin] si

- identificam mai intai un context comun [in care ambele constructii lucreaza]; in mod precis, aratam ca acest context comun are un caracter izentropic;
- extindem acest context comun prin constructii "algebrice", la un context [de tip Burnat] izentropic multidimensional;
- extindem contextul comun prin constructii "diferentiale", la un context [de tip Martin] strict anizentropic de un tip special;
- comparam cele doua contexte extinse si identificam consonante si contraste semnificative si puternic netriviale;
- descriem fragilitatea trecerii analitice, pe cele doua clase de solutii mentionate [wave, interactiuni wave-wave], de la un context izentropic la unul anizentropic; in fapt, contextul anizentropic considerat este limitat la un tip special, iar in interiorul demersului "diferential" aplicat acestui context apar contraste semnificative intre o versiune nestationara si o alta, stationara.

Am participat la doua conferinte majore la care am prezentat lucrarile [5], [6]:

- SIAM Annual Meeting, 6-10 Iulie 2009, Denver CO, SUA [cea mai importanta conferinta anuala a SIAM (Society for Industrial and Appl. Math.)]
- Sesiunea "Nonlinear Conservation Laws and Applications", 13-27 Iulie 2009, organizata de Institute for Mathematics and its Applications, Minneapolis, Minnesota, SUA [la care au fost prezente cele mai importante nume ale comunitatii legate de domeniul mentionat in titlul sesiunii].

Prezenta la aceste conferinte a prilejuit autorilor [L.F. Dinu, M.I. Dinu] sa discute indelung cu personalitati importante: profesorii Randall LeVeque [sisteme hiperbolice de legi de conservare], si Mark Ablowitz [unde solitare nelineare] la Denver, si profesorii Philippe LeFloch [sisteme hiperbolice de legi de conservare], Yuxi Zheng [sisteme hiperbolice de legi de conservare, interactiuni gazodinamice 2D], Barbara Keyfitz [sisteme hiperbolice de legi de conservare, interactiuni gazodinamice 2D], Christian Klingenberg [sisteme hiperbolice de legi

de conservare si modelare de turbulenta], si David Wagner [sisteme hiperbolice de legi de conservare, reprezentari de solutii] la Minneapolis. Lucrarile si aceste discutii au contribuit semnificativ la diseminarea rezultatelor obtinute in acest proiect

Aceste studii au fost facute de colaboratorii de la IMAR si UPB si sunt prezentate in Sinteza rezultatelor din Subcontractele Nr. 1. si Nr. 2.

O parte din rezultatele obtinute fac obiectul unui articol [3] publicat in prestigioasa *Preprint Series of Newton Institute for Mathematical Sciences, Cambridge, U.K.* O alta parte din rezultate vor aparea in *Proceedings of Romanian Academy, Series A (ISI)* intr-un articol [4] trimis spre publicare si acceptat.

### *3. Clasa ecuatiilor cu derivate partiiale de ordinul I ale caror caracteristice Cauchy sunt linii drepte. Formularea variationala proiectiv invarianta a conditiilor entropice pentru aceasta clasa.*

Folosind conceptele de structura proiectiva si de forma de curbura corespunzatoare, descoperite de E. Cartan, am gasit o caracterizare diferential topologica, independenta de transformarile de coordonate fibrate neliniare, a ecuatiei quasiliniare cunoscuta sub numele de "ecuatia lui Burgers nevascoasa" [eBn]. Am degajat conceptul topologic de densitate entropica care ne permite formularea intrinseca a inecuatiei variationala a lui Krujkov atasate unei ecuatiei quasiliniare generale pentru sectiunile unei fibrari neliniare, de fibra 1-dimensională, peste o varietate.

In mod precis, eBn este considerata impreuna cu solutiile ei netede si, respectiv, solutiile ei nenetede cu discontinuitati. O conditie entropica de tip Krujkov [= inecuatie variationala de tip Krujkov] selecteaza [in sensul unicitatii] intre solutiile discontinue o solutie admisibila.

Transformarile de coordonate fibrate neliniare [care duc (in "spatiul total"  $t,x,u$  asociat eBn) grafice de functii in grafice de functii] duc o ecuatie quasiliniara intr-o ecuatie quasiliniara si duc solutii netede in solutii netede. Aceste transformari nu duc insa solutii discontinue admisibile in solutii discontinue admisibile si nici o conditie entropica de tip Krujkov intr-o conditie entropica de tip Krujkov. Rezulta astfel un caracter "imperfect" [in sensul dependentei de coordonate] al unei conditii entropice de tip Krujkov.

Cu ajutorul entitatii densitate entropica am asociat eBn cu o "structura entropica mai fina" [semf] astfel incat perechea ecuatie-semf sa fie dusa intr-o pereche ecuatie-semf printr-o transformare de coordonate fibrate neliniare.

Structura entropica mai fina, si admisibilitatea controlata de ea, apar astfel a fi independente de coordonate. O semf corecteaza astfel caracterul "imperfect" al unei conditii entropice de tip Krujkov. Pe de alta parte, am reusit sa pun in corespondenta fiecare conditie entropica de tip Krujkov cu o semf.

Un demers analog este in progres pentru un sistem quasilinear identificat ca extensie naturala a eBn.

Am acordat o atentie speciala ecuatiei lui Burgers nevascoasa, pentru ca aceasta are caracteristicile linii drepte. Am aratat chiar ca transformarile de functie necunoscute si de coordonate de tipul mentionat care invariaza aceasta ecuatie sunt definite canonic de transformarile proiective ale planului. Am identificat, folosind rezultate ale lui E. Cartan din geometria diferentiala, care sunt ecuatiile quasiliniare (cu  $x$  unidimensional) ce se reduc la ecuatia lui Burgers nevascoasa dupa o transformare de functie si de coordonate de tipul indicat. In acest mod am identificat pentru aceasta ecuatie clasa de conditii entropice noi descoperite de

mine, aratand ca ele se corespund cu anumite conditii abstracte de tip Rankine-Hugoniot. Particularitatea caracteristicelor linii drepte face aplicabile rezultatele geometriei proiective.

Aceste rezultate au fost obtinute de colaboratorii de la IMAR si sunt prezentate in Sinteza rezultatelor din Subcontractul Nr. 1. O parte din aceste rezultate sunt publicate in lucrarea [7].

Seminarul *Sisteme hiperbolice de legi de conservare* desfasurat saptamanal la IMAR, asociat acestui Proiect, a inclus [mai, iunie, septembrie] :

- expunerile lui Gh. Minea asupra ``forme topologice, independente de coordonate, a inecuatiei variationale a lui Krujkov pentru ecuatii quasilineare pe fibrari neliniare, cu accent special pe ecuatia structurii proiective plane". Aceste seminarii contin si rezultatele originale cuprinse in lucrarea [7].
- expunerile lui L. Stoica (IMAR) dupa articolul ``Invariant measures for Burgers equation with stochastic forcing" de Y. Sinai, E. Weinan, K. Khanin, A. Mazel, din Ann. of Math. 151 (2000) pp.877-960.
- expuneri finale ale lui Gh. Minea dupa monografia lui Philippe G. LeFloch ``Hyperbolic Systems of Conservation Laws" [Birhauser 2002].

## **Publicatii**

1. M. Vlad, F. Spineanu, *Diffusion by Hamiltonian movements*, in curs de redactare.
2. M. Vlad, F. Spineanu, *Trapping, anomalous transport and quasi-coherent structures in magnetically confined plasmas*, electronic preprint arXiv.org/Physics0903.2223 (2009); **Plasma and Fusion Research** 4 (2009) 053-1:8.
3. L.F. Dinu, M.I. Dinu, *Martin's ``differential" approach: some classifying remarks*, **Preprint Series of Newton Institute of Mathematical Sciences**, Cambridge UK, No.21/2009.
4. L.F. Dinu, M.I. Dinu, *Gasdynamic regularity and nondegeneracy: some classifying remarks*, **Proceedings of the Romanian Academy**, Series A, [revista ISI]; in curs de publicare.
5. L.F. Dinu, M.I. Dinu, *Martin type ``differential" approach: an ``algebraic" Burnat type classifying characterization*, SIAM Annual Meeting, Denver Colorado SUA, 6-10 iulie 2009.
6. L.F. Dinu, M.I. Dinu, *Gasdynamic regularity and nondegeneracy: some classifying remarks*, Sesiunea "Nonlinear Conservation Laws and Applications", Institute for Mathematics and its Applications, Minneapolis, Minnesota SUA, 13-27 iulie 2009.
7. Gh. Minea, ``Classical" entropy conditions for quasilinear equations on nonlinear fiber bundles, Arhiva de preprinturi arXiv.org e-Print archiv, Cornell University, <http://arXiv.org/abs/0912.0832>.