

## Sinteza rezultatelor obtinute in proiectul de cercetare ID\_1103

### *Investigarea prin metode de teorie de camp a structurilor si a auto-organizarii in fluide si plasma*

#### Obiectivul Proiectului in 2009:

1. Evaluarea extensiva a realizarilor obtinute pana in prezent in vederea integrarii intr-o structura unitara

#### Activitatile Proiectului in 2009:

1.1. Publicarea pe arXiv.org a unui articol de sinteza a rezultatelor noastre de pana acum, ce constituie baza prezentului Proiect.

1.2. Elaborarea lucrarii si participarea la conferinte: 17th Conference on Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics, SUA.

1.3. Identificare variabilelor fizice ale fluidelor/plasmei in termeni de variabile ale teoriei decamp.

Se va determina:

- (1) semnificatia generatorilor algebrei in modelele ne-Abeliene;
- (2) semnificatia termenului din Lagrangian reprezentand interactia neliniara a campului scalar;
- (3) legatura dintre legile de conservare in teoria clasica cu legile de conservare formulate in teoria campului;
- (4) legatura dintre constantele din Lagrangian si parametri fizici cum ar fi raza Rossby sau raza Larmor si vorticitatea asimptotica.

Studii experimentale, numerice si analitice au relevat ca in doua dimensiuni fluidele si plasma arata o tendinta de evolutie intrinseca catre auto-organizare. Aceasta este evidenta la relaxarea din stari turbulente cand fluidul evolueaza catre stari caracterizate de forme regulate ale functiei de curgere care ocupa integral sistemul (structuri coerente). Desi aceasta tendinta de auto-organizare a fost intens studiata, trebuie admis ca astazi nu se dispune de o intelegere si nici de o descriere satisfacatoare a acestui fenomen fundamental. Investigare numerica extensiva a starilor coerente asimptotice obtinute la relaxarea din stari turbulente in fluidul bidimensional ideal incompresibil (Euler) a fost facuta de catre David Montgomery si colaboratorii sai intre anii 1970-1990. Aceasta a permis sa se infereze faptul ca functia de curgere verifica in aceste stari asimptotice ecuatia sinh-Poisson. Pentru plasma aflata in camp magnetic puternic si pentru atmosfera planetara (cu modele fluidice foarte asemanatoare) pierderea invariantei de scala a reprezentat dificultatea care a impiedicat o identificare fara echivoc a ecuatiei ce guverneaza starile finale. Niciuna dintre formulele de fitare propuse pana in prezent nu este unanim acceptata. Nu se cunoaste criteriul care ar putea decide care este formula naturala. In fizica atmosferei starile cuasi-stationare ale ciclului tropical (frecvent observate, de exemplu deasupra Oceanului Pacific) nu au fost examinate analitic ca un sistem complex ce evolueaza pe o varietate de

dimensiune joasa, cu bilantul de vorticitate fiind factorul dominant care determina caracteristicile spatiale ale vortexului. Exista numeroase alte sisteme fizice in care au fost observate (in simulari numerice sau experimentale) stari asimptotice regulate, dar acestea sunt chiar si mai putin intelese decat fluidul Euler. In unele cazuri s-au putut determina solutii de tip structura coerenta dar aceasta doar ca o posibila stare a sistemului si nu ca o destinatie precisa a evolutiei ce o alege exact pe aceasta si exclude orice alta stare posibila. Este recunoscut ca evolutia catre auto-organizare este o proprietate fundamentala a fluidelor si plasmelor. Cu toate acestea, nu dispunem de un model fizic, nu stim cum se poate accede la elaborarea unei teorii pentru aceasta si nu cunoastem care sunt conceptele potrivite pentru a formula o descriere a acestei evolutii.

Am abordat aceste probleme urmarind obtinerea unei formulari in termeni de teorie de camp a dinamicii fluidelor si plasmelor bidimensionale. In esenta, am cautat o descriere teoretica pentru limita continua a modelelor discrete de obiecte punctuale ce interactioneaza in plan printr-un potential auto-generat. A rezultat in mod natural ca aceste modele reprezinta teorii clasice de camp si ca ele ne pun la dispozitie tehnici puternice care sunt specifice acestui domeniu. Pornind de la sistemele fizice concrete si uzand de argumente fizice combinate cu un anumit grad de inferenta (si in plus inspirate de imensa acumulare de modele ale teoriei clasice si cuantice a campurilor) am construit functionale de densitate de Lagrangian din care s-au putut deduce elemente de dinamica pentru sistemele mentionate.

Aceasta abordare ne-a permis sa obtinem o serie de rezultate originale privind acest proces fundamental de auto-organizare si unele aplicatii in diferite domenii. Principalele rezultate, prezentate intr-o serie de lucrari din care cele mai importante sunt [1]-[8], sunt :

- Pentru **fluidul bidimensional ideal incompresibil (Euler)** am gasit o expresie a densitatii de Lagrangian ne-Abelian pentru limita continua a modelului de vortexuri punctuale ce interactioneaza printr-un potential exprimat ca suma peste logaritmul natural al distantelor relative (interactie Coulombiana in plan). Extremumul absolut al functionalei actiunii este obtinut la auto-dualitate. Aceasta ne-a oferit deducerea pur analitica a ecuatiei sinh-Poisson care guverneaza starile vorticale coerente pe care fluidul Euler le obtine la relaxare din stari turbulente.
- Pentru **profilul de densitate de curent in sectiunea meridionala a plasmelor tokamak** am gasit o expresie a densitatii de Lagrangian pentru limita continua a modelului de elemente de curent de marime identica si de unic semn. Acest model este Abelian, are stari de auto-dualitate si ne-a permis deducerea pur analitica a ecuatiei Liouville invocata in fizica plasmelor tokamak drept o aproximatie acceptabila pentru profilul de densitate de curent.
- Pentru starile stationare coerente ale atmosferei planetare si ale plasmelor bidimensionale aflate in camp magnetic puternic (sisteme fizice foarte asemanatoare) am gasit o expresie a unui Lagrangian ne-Abelian pentru limita continua a unui model discret de vortexuri punctuale interactionand in plan printr-un potential cu raza scurta de actiune. Am dedus o ecuatie diferentiala pentru starile asimptotice care apare capabila sa produca foarte bune rezultate practice, pentru:
  - Starile cuasi-stationare ale ciclonei tropicale;
  - Structuri de curgere vorticala de scala larga in tokamak;
  - Cristale de vortexuri in plasma ne-neutra;
  - Vortexuri de scala larga in dispozitive lineare cu plasma.

Comparatia dintre rezultatele noastre (deduse dintr-o teorie de camp) si observatii, experimente si simulari numerice sunt foarte favorabile.

- **Limita Abeliana a modelului precedent** conduce la o noua ecuatie pentru structuri auto-duale ce descriu vortexuri inelare, la fel ca acelea din regimul de confinare inalta din tokamak, sau inlocuirea structurii centrale *eye-wall* de la ciclonul tropical, etc.

In aceasta etapa s-au analizat rezultatele obtinute pana acum in scopul intelegerii mai generale a legaturii dintre sistemul fizic si modul de constructie a densitatii de Lagrangian pentru teoria de camp asociata acestuia.

In aceasta faza a lucrarii au avut loc numeroase interactiuni cu cercetatori angajati in studierea cu mijloace clasice a unor probleme fundamentale de fizica fluidelor, plasmei si atmosferei. Mentionez in mod special discutiile cu profesorul David Montgomery de la Universitatea Dartmouth din SUA, care sunt continuarea unei colaborari incepute din anul 2000 si cu profesorul J. B. Taylor de la UKAEA, Anglia. Fara a exprima rezerve asupra teoriei elaborate de noi si recunoscand rezultatele care in abordarea clasica sunt inaccesibile, s-a subliniat necesitatea de a se oferi interpretari intuitive ale conceptelor si operatiunilor efectuate in abordarea de teorie de camp. Aceasta a determinat o re-orientare a activitatilor din aceasta perioada prin acordarea unei prioritati explicarii conexiunii care exista intre marimile din teoria campului pentru fluidul Euler si marimile fizice obisnuite (viteza, vorticitate, etc.).

Exista cateva puncte critice care necesita identificarea sensului fizic a unor operatiuni efectuate in teoria campului pentru Euler:

- Caracterul non-Abelian al modelului
- Expresia potentialului de auto-interactie a campului scalar, de ordinul patru
- Semnificatia celor doua functii  $\rho_1$  si  $\rho_2$  ce reprezinta patrutul coeficientilor complecsi ai generatorilor ladder din expresia campului scalar
- Semnificatia relatiei fundamentale  $\rho_1 \rho_2 = 1$  intre aceste functii, aflata la originea expresiei sine-hyperbolic ce apare in ecuatia finala la auto-dualitate

Aceasta lista este de fapt mult mai mare dar ne-am propus clarificarea, chiar si partiala, a semnificatiei fizice a celor mentionate.

Fluidul ideal incompresibil in doua dimensiuni este guvernata de ecuatia Euler, care afirma ca vorticitatea este conservata in transportul convectiv de propriul ei camp de viteza. Sensul fizic este perfect limpede si marimile implicate sunt masurabile experimental, dar ecuatia este extrem de greu de investigat teoretic, in orice aplicatie se apeleaza aproape imediat la simulari numerice. Modelul fizic este echivalent cu modelul (Kirchhoff – Onsager) ce consta intr-un sistem discret de vortexuri punctuale, iar limita continua este teoria de camp pe care am construit-o pentru fluidul Euler. Un model similar exista pentru descrierea unui set de sarcini punctuale ce evolueaza in plan datorita unei interactiuni asemanatoare cu modelul Kirchhoff – Onsager. Acest model, dezvoltat de Jackiw si Pi este Abelian. Diferenta este clara : sarcinile in plan pot fi descrise de un camp scalar complex dar vortexurile punctuale au un caracter spinorial : exista doar in doua valori (positiva si negativa) si nu se pot suprapune. Deoarece spinorii reprezinta cea mai coborata reprezentare a grupului Lorentz a carui acoperire complexa este  $SL(2, C)$ , campul scalar ce va reprezenta in teoria de camp densitatea de vortexuri punctuale va fi un element al algebrei  $sl(2, C)$ . Corespunzator si campul de etalonare ce mediaza interactia in plan intre vortexuri este un element al aceleiasi algebre. Caracterul non-Abelian al modelului este simpla reflectare a naturii spinoriale a vortexurilor elementare din modelul Kirchhoff-Onsager.

Caracterul spinorial sugerează ca există apropieri cu modele de fermioni în interacție iar exploatarea acestor similitudini poate sugera explicații intuitive. Neliniaritatea de ordinul patru a potențialului scalar de auto-interacție poate fi privită ca un termen din dezvoltarea funcției cosinus având ca argument câmpul scalar. Un model care conține în Lagrangian funcția cosinus este modelul sine-Gordon. Primul termen din dezvoltarea lui cosinus, o constantă, nu joacă nici un rol în Lagrangian, iar al doilea termen este pătratul funcției scalare. Acest termen se poate asocia masei ca o simplă corecție. În domeniul în care dezvoltarea funcției cosinus este o aproximație acceptabilă, modelul nostru pentru Euler și modelul sine-Gordon au o dinamică similară pentru câmpul scalar, dacă acesta este liber.

Pe de altă parte modelul sine-Gordon este echivalent cu modelul Thirring de fermioni masivi interacționând în plan printr-un termen de tip current – current (numită conventional JJ). Acest termen de interacție se poate scrie ca suma a doi termeni de naturi diferite : primul este echivalent cu densitatea de spini la pătrat iar al doilea este echivalent cu pătratul curentului chiral, datorită apariției matricii  $\gamma_5$ . Ceea ce am observat noi este faptul că aceste componente distincte ale interacției JJ Thirring corespund logic cu două cantități esențiale din modelul dezvoltat de noi pentru Euler : pătratul densității de spini este pătratul amplitudinii câmpului scalar iar pătratul curentului chiral este echivalent cu pătratul comutatorului câmpului scalar cu conjugatul sau Hermitic, ceea ce în starea de auto-dualitate reprezintă de fapt vorticitatea fizică. Expresia interacțiunii Thirring JJ ca suma de doi termeni devine o suma de acești doi termeni din teoria noastră (bosonică) a fluidului Euler. Suma se reduce la produsul  $\rho_1 \rho_2 = 1$  (după normalizări). Aceasta ne-a furnizat explicația fizică a condiției fundamentale menționată mai sus: pentru ca extremul acțiunii sistemului Thirring să fie atins este necesar ca termenul cinetic conținând derivata Dirac să fie zero iar interacțiunea să fie o simplă constantă (nu zero, pentru a evita starea trivială). Deci relația dintre cele două densități de acțiune a generatorilor ladder ai algebrei  $su(2, C)$ , relație fundamentală pentru a se deduce ecuația sine-hyperbolic Poisson, este o expresie a extremului energetic. Ori, starea de auto-dualitate reprezintă de fapt extremul absolut în spațiul stărilor (netriviale) de curgere.

Aceasta a permis să se înțeleagă în mod mai intuitiv felul cum această relație a fost dedusă în cadrul modelului nostru, bosonic. În acest cadru prima ecuație de autodualitate implică comutatori între câmpul scalar și câmpul de etalonare ce apar în expresia derivatei covariante. Ipoteza algebrică asupra structurii în  $su(2, C)$  a câmpurilor face ca în comutatorii implicați de derivata covariantă să nu existe mixaj între generatorii ladder. Deci ecuația matricială se splitază în două ecuații distincte din care prima permite determinarea câmpului de etalonare în funcție de doar una din funcțiile coeficient de generator ladder iar cealaltă permite determinarea (conjugatului complex) al câmpului de etalonare în funcție de doar una – și anume cealaltă – funcție coeficient de generator ladder. Acest lucru face ca a doua ecuație de auto-dualitate (care este ecuația Gauss) să poată calcula valoarea unei aceleiași expresii (tensorul câmp de etalonare) în două moduri diferite, și deci să releve existența acelei relații fundamentale între densitățile de acțiune ale generatorilor ladder ai  $su(2, C)$ . Cele două explicații sunt de fapt exprimări diferite ale faptului că sistemul este la extremul acțiunii : în limbaj fermionic interacțiunea JJ de tip Thirring este redusă la o constantă peste tot, iar în limbajul teoriei bosonice, acțiunile operatorilor ladder sunt conjugate hermitic și deci efectele lor, în valoare absolută, sunt identice, ceea ce asigură anihilarea părții cinetice din Lagrangian.

Prin studiile prezentate rezumativ mai sus, am raspuns, in masura satisfacatoare pentru aceasta etapa, cerintei de a oferi semnificatii mai intuitive, pe cat posibil fizice, pentru etapele esentiale in deducerea ecuatiei sine-hyperbolic.

O alta problema care a fost abordata in aceasta faza a lucrarii este cea a concentrarii de vorticitate.

Motivul consta in aceea ca modelul de teorie de camp este mult mai detaliat si mai extins decat ecuatie originala Euler. Cadrul pe care il ofera teoria de camp trebuie sa fie confruntat cu probleme de fluide care gasesc foarte greu descrieri sau explicatii in abordarea traditionala. Pe de alta parte concentrarea de vorticitate este un proces fizic extrem de important de exemplu la formarea toranelor si a cicloanelor tropicale, la gasirea formei speciale pe care o au vorturile in oceane sau in experimente de laborator. Nu exista in abordarea traditionala decat o singura explicatie a concentrarii de vorticitate, anume legata de variatia pe verticala a vitezei de convecție verticala.

In abordarea acestei probleme in cadrul teoriei de camp am avut in vedere posibilitatea de a exploata anomalia axiala.

Modelul nostru de teorie de camp pentru fluidul Euler, care este validat prin deducerea ecuatiei sine-hyperbolic are comportarea similara cu alte modele (fie bosonice fie fermionice) . In unul dintre ele se considera un camp scalar complex care are o singularitate topologica asociata unei rupei de simetrie la rotatiile in jurul unui string linear. Valoarea campului scalar este zero in string si creste cu cat se indeparteaza de el pana la saturarea la o valoare finita. Exista un camp fermionic care interactioneaza cu stringul scalar si modurile fermionice de-a lungul lui sunt cu masa zero. In regiunea din afara stringului, fermionii capata o masa (adica interactia cu stringul devine de raza scurta) si deci nu se propaga. Aceasta parte este foarte asemanatoare cu ceea ce avem nevoie pentru a defini in termeni de teorie de camp fiecare vortex punctual, vazut ca o simpla linie perpendiculara pe planul fluidului. O asemenea descriere individuala a vortexurilor elementare nu a fost necesara in cadrul modelului bosonic. Curentul fermionic sustinut de modurile zero de-a lungul stringului este chiral. Acest curent se conserva.

Introducerea unei interactiuni cu un camp de etalonare genereaza anomalii : curentul fermionic nu mai este conservat divergenta sa nu mai este zero ci este egala cu o expresie de campul de etalonare. Dincolo de considerentele topologice legate de indexul operatorului Dirac, ceea ce este foarte relevant pentru modelul nostru de teorie de camp este faptul ca se poate gasi expresia curentului fermionic radial indus de prezenta campului de etalonare, acest curent fiind cel care compenseaza exact curentul chiral de-a lungul stringului. Fizic avem de fapt o concentrare de sarcini catre string si o deplasare a acestora de-a lungul stringului. Aceasta este foarte sugestiv pentru concentrarea de vorticitate catre stringul central si compensarea aportului de vorticitate prin variatia verticala a vitezei fluidului.

In aceasta etapa avem deci un model de teorie de camp care contine esenta fizica a concentrarii de vorticitate, insa explicata clasic prin convecție verticala.

Vom cauta sa trecem o integrarea acestui model in cel dezvoltat de noi pentru fluidul Euler. Notam insa ca modelul ce sustine anomalia axiala ca forma clasica de concentrare de vorticitate are si particularitatea ca ofera o descriere corecta si exploatabila a vortexurilor

punctuale. Cel mai probabil va fi necesar sa trecem la o descriere non-Abeliana, pentru ca advectiona de vortexuri punctuale sa nu fie redusa numai la aspectul de sarcina (cum impune modelul Abelian).

Structura campului de etalonare ce defineste de fapt anomalia prin integrarea pe spatiu-timp a invariantului topologic Chern-Simons se leaga de conditiile la margine pentru viteza.

A fost pregatita o lucrare intitulata :

*“Physical aspects of the field-theoretical description of two-dimensional ideal fluids”*

care este trimisa in primul rand la *arXiv.org* pentru a fi discutata cu alti cercetatori, iar apoi va fi trimisa la publicat la o revista ISI.

Pe de alta parte, s-au evaluat rezultatele practice obtinute in cazuri particulare: vortexuri atmosferice, miscarea vorticala in plasma, cristalurile de vortexuri in plasma de electroni, etc. S-a identificat un alt domeniu in care rezultatele noastre ar putea fi aplicate (structurile coerente formate la interactia laserilor de mare putere cu plasma) si s-au facut primele estimari.

A fost elaborata o lucrare de sinteza in care prezentam aceste rezultate. Ea a fost publicata pe internet in importanta Arhiva [*arXiv.org* e-Print archiv] a Universitatii Cornell, SUA [L1].

A fost elaborata o lucrare [*„A field theoretical model of stationary atmospheric vortices”*] care a fost propusa la 17th Conference on Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics, Stowe, SUA. Aceasta este o conferinta foarte importanta in care s-au prezentat aproximativ 200 lucrari. Lucrarea contine aplicatia rezultatelor noastre privind starile asimptotice ale fluidelor la cazul cicloanelor tropicale. Ea a fost acceptata ca lucrare invitata. Este un succes important al grupului nostru care participa pentru prima oara la o conferinta dedicata fizicii atmosferei si a oceanelor. Trataria originala propusa de noi si rezultatele obtinute au avut un deosebit succes. Am fost invitati sa participam la o propunere de proiect de cooperare Europeana (COST) cu titlul

***“Basic Concepts for Convection Parametrization in Weather Forecast and Climate Models”***

Ni s-a propus, de asemenea, sa facem parte din Managing Committee. Proiectul isi propune sa aduca o fundamentare teoretica mai solida in modelele de climat si de previziune a vremii ce sunt folosite in simularile numerice. **Proiectul a fost recent acceptat (decembrie 2009).**

1. F. Spineanu, M. Vlad, “Spectrum of coherent structures in a turbulent environment”, **Physical Review Letters** **84** (2000) 4854.
2. F. Spineanu, M. Vlad, “Coherent structures in a turbulent environment”, **Physical Review E** **65** (2002) 026406.
3. F. Spineanu, M. Vlad, *Self-duality of the relaxation states in fluids and plasmas*, **Physical Review E** **67** (2003), 046309.
4. F. Spineanu, M. Vlad, *Stationary vortical flows in 2-dimensional plasma and planetary atmosphere*, **Physical Review Letters** **94** (2005) 235003.

5. F. Spineanu, M. Vlad, K. Itoh, H. Sanuki, S.-I. Itoh, *Pole dynamics for the Flierl-Petviashvili equation and zonal flows*, **Physical Review Letters** **93** (2004) 025001.
6. F. Spineanu, M. Vlad, *Statistical properties of an ensemble of vortices interacting with a turbulent field*, **Physics of Plasmas** **12** (2005) 112303.
7. F. Spineanu, M. Vlad, K. Itoh, S. -I. Itoh, *Stationary vortical structures in stationary turbulence*, **Journal of Plasma and Fusion Research Series** **6** (2004) 89.
8. F. Spineanu, M. Vlad, “*Relationships between the main parameters of the stationary two-dimensional vortical flows in planetary atmosphere*”, **Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics** **103** ( 2009) 223-244.

L1. F. Spineanu, M. Vlad, „*A field theoretical approach to the description of coherent structures in two-dimensional fluids and plasmas*”, electronic preprint  
arXiv.org/Physics0909 (2009)

L1. F. Spineanu, M. Vlad, “*Physical aspects of the field-theoretical description of two-dimensional ideal fluids*” , electronic preprint  
arXiv.org/Physics1001.0151 (2010)

L2. F. Spineanu, M. Vlad, „*A field theoretical model of stationary atmospheric vortices*”,  
17th Conference on Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics, 8-12 June 2009, Stowe, VT  
USA (lucrarea invitata).